Charlier, Carl Vilhelm
Ludwig
Über hydrodynamisches
Gleichgewicht in Stern-
systemen

J. Brandt.

Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik
utgifvet af
K. Svenska Vetenskapsakademien
Band 12. N:o 21.

Meddelande från Lunds astronomiska observatorium.
N:o 82.

# Ueber hydrodynamisches Gleichgewicht in Sternsystemen.

Von
C. V. L. Charlier.

Vorgelegt am 28 Februar 1917.

Stockholm.
Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.
1917.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 12. N:o 21.

Meddelande från Lunds astronomiska observatorium.





# Über hydrodynamisches Gleichgewicht in Sternsystemen.



Von

C. V. L. CHARLIER.

Vorgelegt am 28. Februar 1917.

Wenn von dem Einflusse der Passagen und der Kollisionen weggesehen wird, so wird die Bewegung eines Sterns in einem Sternsysteme nur von der Gesamtattraktion des ganzen Sternhaufens bestimmt. Man steht dann vor einem Problem ähnlicher Art wie in der Hydrodynamik. Ist die Verteilung der Sterne und ihrer Geschwindigkeitskomponenten unter dem alleinigen Einfluss dieser Gesamtattraktion von der Zeit unabhängig, so sage ich, dass das Sternsystem sich in *hydrodynamischem Gleichgewicht* befindet.

Ich werde solche Sternsysteme betrachten, in welchen die Sterne symmetrisch um eine Achse verteilt sind. Im Besonderen werde ich die Frage untersuchen, ob eine ellipsoidische Geschwindigkeitsverteilung in solchen Systemen möglich ist.

Es sei

$$F = F(t;\, x, y, z;\, u, v, w)$$

die Frequenzfunktion, so dass

$$F\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw$$

die Zahl der Sterne bezeichnet, die sich zur Zeit $t$ in dem Gebiet

$$x \pm \frac{1}{2} dx,$$

$$y \pm \frac{1}{2} dy,$$

$$z \pm \frac{1}{2} dz$$

befindet und deren Geschwindigkeitskomponenten gleichzeitig zwischen den Grenzen

$$u \pm \frac{1}{2} du,$$

$$v \pm \frac{1}{2} dv,$$

$$w \pm \frac{1}{2} dw$$

liegen.

In der statistischen Mechanik wird bewiesen (man vergleiche Meddelande, Ser. II, N:o 16), dass die Funktion $F$ die folgende Differentialgleichung befriedigt:

$$\frac{dF}{dt} = \nabla(F) + \square(F). \tag{1}$$

Hier bezeichnet $\nabla(F)$ die »Passagefunktion» und $\square(F)$ die »Kollisionsfunktion», auf welche wir hier nicht näher einzugehen haben. Was die linke Seite betrifft, so ist

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial w}. \tag{1*}$$

Indem wir hier von Passagen und Kollisionen absehen, haben wir es hier nur mit der Gleichung

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

zu tun. Ist die Verteilung (der Sterne und ihrer Geschwindigkeiten) in Gleichgewicht, so ist $F$ von $t$ unabhängig, so dass ausserdem

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

ist. Die partielle Differentialgleichung für $F$ lautet nun

$$0 = u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial w}. \tag{2}$$

Hier ist $V$ das Potential, das als eine Funktion der Koordinaten $x, y, z$ zu betrachten ist.

Die Differentialgleichung (2) hat immer das Integral

$$F = \varphi = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - V, \tag{3}$$

wie unmittelbar ersichtlich ist.

Offenbar ist auch jede Funktion von $\varphi$ auch ein Integral.

Nehmen wir nun an, dass die Dichtigkeit symmetrisch um die $Z$-Achse verteilt ist, so ist

$$V = V(p, z),$$

wo

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

In solchem Fall ist

$$F = \psi = uy - vx \tag{4}$$

auch ein Integral von (2). Mehr allgemein können wir nun

$$F = F(\varphi, \psi) \tag{5}$$

annehmen, wo $F(\varphi, \psi)$ eine beliebige Funktion von $\varphi$ und $\psi$ bezeichnet.

Wenn im Besonderen die Geschwindigkeitsverteilung eine *ellipsoidische* ist, so muss $F$ die folgende Form haben

$$(5^*) \qquad F = C e^{-k_1 \varphi + k_2 \psi^2 + k_3 \psi}.$$

Hier ist $k_1$ eine *positive* Konstante, wogegen $k_2$ und $k_3$ unter Umständen positiv oder negativ sein können.

Das Geschwindigkeitsellipsoid hat nun die Gleichung

$$(6) \qquad \frac{k_1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - k_2 (uy - vx)^2 - k_3 (uy - vx) = \text{Konst.}$$

Zur Bestimmung der Achsen haben wir die JACOBI'sche Gleichung

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \frac{k_1}{2} - k_2 y^2 - s, & k_2 xy & , 0 \\ k_2 xy & , \frac{k_1}{2} - k_2 x^2 - s, & 0 \\ 0 & , 0 & , \frac{k_1}{2} - s \end{vmatrix} = 0$$

zu betrachten, die unmittelbar lösbar ist und die folgenden Wurzeln gibt:

$$s_1 = \frac{k_1}{2},$$

$$s_2 = \frac{k_1}{2} - k_2 (x^2 + y^2),$$

$$s_3 = \frac{k_1}{2}.$$

Das Geschwindigkeitsellipsoid ist somit ein *Rotationsellipsoid.* Die zweite Wurzel ($s_2$) entspricht der Rotationsachse.

Es seien $l$, $m$, $n$ die Richtungscosinen dieser Achse. Dann hat man zu ihrer Bestimmung die Gleichungen:

$$\left(\frac{k_1}{2} - k_2 y^2 - s_2\right) l + k_2 xy m = 0,$$

$$k_2 xy l + \left(\frac{k_1}{2} - k_2 x^2 - s_2\right) m = 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{k_1}{2} - s_2\right) n = 0.$$

Wird der Wert von $s_2$ hier eingeführt, erhalten wie somit

$$n = 0,$$

$$\frac{l}{y} = \frac{m}{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Rotationsachse senkrecht zur $Z$-Achse und auch senkrecht zum Radius Vektor ist.

Wir sind somit zum folgenden Schluss gekommen: *Wenn in einem Sternhaufen, wo die Sterne symmetrisch um eine Achse verteilt sind, hydrodynamisches Gleichgewicht vorkommt und die Geschwindigkeitsfläche eine ellipsoidische ist, so muss diese Fläche ein Rotationsellipsoid sein mit der Rotationsachse senkrecht zum Radius Vektor vom Zentrum des Sternhaufens.*

Die obigen Auseinandersetzungen wurden vom Verfasser im Jahre 1915 ausgeführt. In der Dezember-Nummer der Monthly Notices of the R. Astr. Soc. wird dasselbe Problem von JEANS behandelt, und zwar gelangt er dabei zu demselben Resultat wie oben. Indessen unterscheiden wir uns in bezug auf die Anwendung dieses Resultats auf unser Sternsystem.

Bekanntlich ist, nach SCHWARZSCHILD, die Verteilungsfläche der Sterngeschwindigkeiten genähert ein Rotationsellipsoid, und zwar ist die Rotationsachse gegen den sogenannten *Vertex* gerichtet. Ist diese Richtung senkrecht zum Radius Vektor oder nicht?

Nach JEANS ist dies nicht der Fall. Ich vermute, dass er — obgleich er dies nicht ausdrücklich angibt — dabei auf eine von TURNER vorgeschlagene Hypothese denkt, dass nämlich die meisten Sterne sich von und zu dem Zentrum des Sternsystems bewegen, wonach also Vertex gegen das Zentrum (und also nicht senkrecht dazu) gerichtet sein sollte. Indessen hat TURNER diese Deutung eben nur als eine Hypothese aufgestellt, eine Hypothese die auch alle Beachtung verdient. Eine Untersuchung, die ich im vorigen Jahre über die $B$-Sterne ausgeführt habe (Medd. Ser. II, N:o 14), hat indessen gezeigt, dass diese Mutmassung nicht zutreffend ist. Es geht in der Tat hervor, dass das Zentrum unseres Sternsystems wahrscheinlich im Sternbilde *Carina* liegt und dass somit die Richtung der Rotationsachse des Geschwindigkeitsellipsoids nahe senkrecht zum Radius Vektor vom Zentrum steht.

Es läge also nichts im Wege, das Sternsystem als ein System genähert in hydrodynamischem Gleichgewicht zu betrachten. Wenigstens insofern es auf das Aussehen und die Lage der Geschwindigkeitsfläche ankommt.

Dieser Gesichtspunkt wurde von mir in der Meddelande N:o 81 gegen die Schlussfolgerung JEANS' hervorgehoben.

Es ist zwar dabei nicht abgemacht, dass das Milchstrassensystem (genähert) in solchem Gleichgewicht ist, da eben andere Bedingungen für dies Gleichgewicht noch nicht betrachtet worden sind.[1]

Lassen uns das Koordinatensystem drehen, so dass die neue $X$-Achse längs dem Radius Vektor (oder richtiger längs der Projektion des Radius Vektors in der $XY$-Ebene) liegt. Bezeichnen wir die neuen Geschwindigkeitskomponenten mit $u'$, $v'$, $w'$, so ist somit

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
u &= u'\frac{x}{r} - v'\frac{y}{r},\\
v &= u'\frac{y}{r} + v'\frac{x}{r},\\
w &= w',
\end{aligned}
$$

wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

so dass

$$u^2 + v^2 + w^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2,$$

$$uy - ux = -rv'.$$

Die Gleichung für die Geschwindigkeitsfläche nimmt nunmehr die Form

$$\frac{k_1}{2} u'^2 + \left(\frac{k_1}{2} - k_2 r^2\right) v'^2 + \frac{k_1}{2} w'^2 + k_3 r v' = \text{Konst.}$$

an, oder

$$\frac{k_1}{2} u'^2 + \left(\frac{k_1}{2} - k_2 r^2\right) \left(v' + \frac{k_3 r}{k_1 - 2 k_2 r^2}\right)^2 + w'^2 \tag{10}$$
$$= \text{Konst.} + \frac{k_3^2 r^2}{2(k_1 - 2 k_2 r^2)}.$$

Wir finden unsere früheren Schlüsse in bezug auf die Achsen bestätigt. Werden die Dispersionen der Geschwindigkeitskomponenten mit $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ bezeichnet, so ist

$$\sigma_1 = 1 : \sqrt{k_1},$$
$$\sigma_2 = 1 : \sqrt{k_1 - 2 k_2 r^2},$$
$$\sigma_3 = 1 : \sqrt{k_1}.$$

Ausserdem haben wir eine *Sterngeschwindigkeit* senkrecht zum Radius Vektor vom Betrage

$$-\frac{k_3 r}{k_1 - 2 k_2 r^2}.$$

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

1) $k_2$ *positiv.*

In diesem Falle ist $\sigma_2$ die grösste Dispersion (wie im Milchstrassensystem). Wenn aber das Sternsystem bis zum Abstand $r = \sqrt{k_1 : 2 k_2}$ sich erstreckt, so wird in diesem Abstande sowohl die Dispersion $\sigma_2$ wie die Stromgeschwindigkeit unendlich gross. Auch die Dichtigkeit wird unendlich. Die betrachtete Lösung wäre nur möglich, wenn das System nicht bis zum Abstande $r = \sqrt{k_1 : 2k}$ hinausgestreckt ist. Es kommt mir aber sehr fraglich vor, ob eine solche Begrenzung des Systems mit den gemachten Annahmen vereinbar wäre.

2) *k negativ.*

In diesem Fall kann sich das System ins Unendliche erstrecken. Die Rotationsachse ist die *kleinste* Achse. Ein solches System liegt nicht in der Milchstrasse vor.

Tryckt den 21 juni 1917.

Uppsala 1917. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.